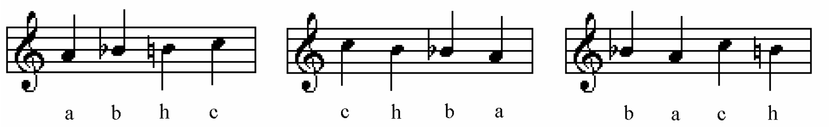
# Die Musik des Pythagoras – und was aus ihr wurde

Erklingt eine der Kompositionen Mozarts, Haydns, Beethovens, Schuberts oder Johann Sebastian Bachs, sind wir von der Tiefe des musikalischen Ausdrucks, den genialen Einfällen, den kunstvollen Verarbeitungen hingerissen. Verändert man nur eine Note, hören wir den Misston; lässt man nur eine Phrase aus, bricht das Werk in sich zusammen. Es ist dem rational-analytischen Denken sicher nicht gegeben, die Schönheit der musikalischen Komposition eines Genies auszuloten, sachliche Begriffe kennzeichnen nur unzureichend den im Kunstwerk verborgenen Gehalt.

Vermögen nüchterne Zahlen eine Ahnung dessen zu vermitteln, was bewusst oder unbewusst den von tiefen religiösen Empfindungen getragenen Werken Bachs zugrunde liegt? Angesichts der Probleme bei der sachgerechten Deutung eines Kunstwerks sind Zweifel mehr als berechtigt. Dennoch spielen Zahlenbeziehungen im Schaffen Bachs eine nicht unwesentliche Rolle. Die kultisch-symbolische Bedeutung von Zahlen war zur Zeit Bachs sehr lebendig und allgemein geläufig. Man kann daher annehmen, dass Bach, der keine Note in den ihm bedeutsam scheinenden Werken unüberlegt oder zuviel schrieb, gerade mit den sich aus den Noten ergebenden Zahlenbeziehungen Aussagen vornehmlich religiöser Natur mit seinen Kompositionen verweben wollte.

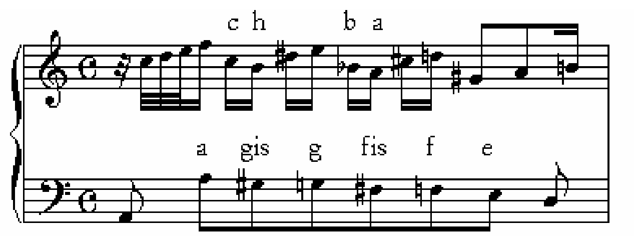
Die Quelle, aus der Bach seine Kenntnisse und Antriebe zur Darlegung religiöser Gedanken in zahlensymbolischer Verkleidung bezog, war einerseits die Lutherbibel: In einer von Abraham Calov kommentierten Ausgabe hatte Bach jene Stellen besonders hervorgehoben, die von Personen und Ereignissen handeln, welche in Verbindung zu Zahlen stehen. So wie „Gott cirkelt", also seine gesamte Schöpfung nach dem Gesetz der Zahlen errichtet und Moses die Zahlen für die Wohnstätte in der Wüste Sinai ins Herz gelegt hat, hat der göttliche Baumeister auch dem Johann Sebastian Bach die Zahlen für den musikalischen Tempel anheimgestellt, und Bach hat mit diesen göttlichen Zahlen „gecirkelt". Andererseits beeinflusste die Philosophie der Aufklärung Bach, vor allem das rationalistische Denken von Leibniz, der zugleich ein begnadeter mathematischer Entdecker war. Insbesondere beim kunstvollen Versetzen wird Bach von der mathematischen *ars combinatoria*, der Kunst des Kombinierens, des Gottfried Wilhelm Leibniz geleitet: Man trifft oft auf die Versetzung der vier Töne a, b, c, h, wobei die Anordnung a-b-h-c einem *Aufstieg*, die Anordnung c-h-b-a einem *Abstieg* und die dem Kreuzmuster entsprechende Anordnung b-a-c-h dem *Kreuz* (und natürlich auch zugleich dem Namen Bachs) entspricht.

Ein berühmtes Beispiel ist der abschließende Kontrapunkt in der „Kunst der Fuge", worin b-a-c-h das letzte Thema der Fuge darstellt. Dass daran die Noten cis-d anschließen, deutet auf eine *Erhöhung* hin gemäß des in der Calov-Bibel von Bach markierten Wortes: „So demütigt euch nun unter die gewaltige Hand Gottes, dass er euch



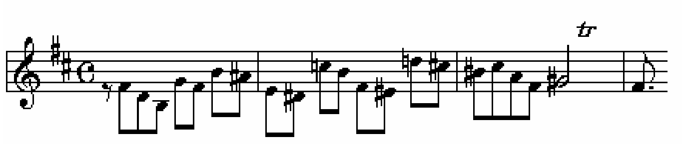

erhöhe zu seiner Zeit."

Ein anderes Beispiel findet sich im ersten Takt des a-moll Präludiums aus dem zweiten Teil des „Wohltemperierten Klaviers": Der Sopran




beginnt mit einer Schmerz ausdrückenden Tonfolge, wobei er die 4 Stufen der absteigenden Halbtonfolge c-h-b-a einbindet, die der Bass mit den 6 Tönen der absteigenden Halbtonfolge a-gis-g-fis-f-e zur Zahl 10 der göttlichen Gebote ergänzt.

Auf die Zahlenbeziehungen, die man aus dem Thema der in h-moll geschriebenen letzten Fuge vom ersten Teil des „Wohltemperierten Klaviers" entnehmen kann, wollen wir ausführlicher eingehen:

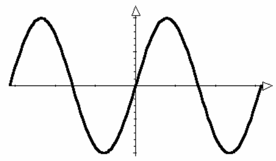



Die Fuge besitzt klangliche Verwandtschaft mit dem Kyrie der h-moll-Messe: nach dem zerlegten h-moll-Dreiklang folgen, ein Seufzen imitierend, Sekundschritte, bis das Thema mit einem zerlegten fis-moll-Dreiklang und der Rückkehr zur Dominante fis endet. Ein sehr verwandtes Thema spielt die Gambe in dem bezeichnenderweise ebenfalls in der Tonart h-moll verfassten Präludium vor dem „Es ist vollbracht“ in der Johannes-Passion. Es mag auch kein Zufall sein, dass dieses Präludium aus 19 Takten besteht, während die Fuge in h-moll des „Wohltemperierten Klaviers“ genau $4 \cdot 19 = 76$ Takte umfasst. Schließlich ist anzumerken, dass die Fuge aus 14 Einsätzen des Themas besteht — die Zahl $14 = 2 + 1 + 3 + 8$ entspricht numerologisch B+A+C+H, wenn man jedem Buchstaben seine Ordnungszahl im Alphabet zuweist; auf diese Weise hat Bach in der letzten Fuge seines monumentalen Werks das „Wohltemperierte Klavier“ mit seiner Unterschrift versehen.

Zunächst ist bemerkenswert, dass das Fugenthema die gesamte Tonskala durchmisst: alle zwölf Töne erklingen. Die Zahl 12 symbolisiert nicht nur die gesamte Chromatik der Töne, sie steht überhaupt für die „Vollendung“, denn sie ist das Produkt $12 = 3 \cdot 4$ der Zahl 3 der Dimensionen des Raumes mit der Zahl 4 der Himmelsrichtungen beziehungsweise der antiken Elemente Erde, Feuer, Wasser, Luft, zugleich ist sie die Zahl der Tierkreise am Himmel und der Monate des Jahres. Allerdings kommen im Fugenthema die zwölf Töne nicht wie in einer strengen Zwölftonreihe je einmal, sondern verschieden oft vor: am häufigsten, nämlich fünf mal ertönt fis, die fünfte Stufe der Tonika h, fünf Töne erklingen tiefer als fis und elf höher. In der Numerologie wurden die Zahlen 5 und 11 zumeist im tragischen Konnex gesehen: man denke an die fünf Wundmale des Gekreuzigten oder daran, dass 11 als „Übertretung“ der Gesetzeszahl 10 die „Sünde“ symbolisiert. In der Zahlensymbolik Bachs bedeutet eine Vertauschung der Ziffern oft die Umkehrung dessen, was das ursprüngliche Symbol darstellen wollte: steht 12 für die Vollendung der Welt, bedeutet 21 die Sehnsucht nach ihrer Erlösung — und aus 21 Noten besteht das Fugenthema …

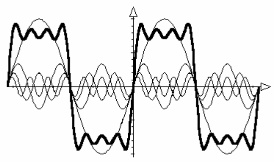
So reizvoll ein derartiges Hineinlesen symbolträchtiger Zahlen auch sein mag, es bleibt immer mehrdeutig, bezweifelbar, oberflächlich und gewinnt dem Zahlbegriff nur eine einzige, wenn auch schillernde Facette ab. Der Zusammenhang zwischen Zahl und Musik ist in Wahrheit viel tiefgründiger.

Beginnen wir mit der Feststellung, dass das Ohr beim Hören eines einzelnen Tons eine periodische Folge von Schwingungen wahrnimmt:



Sinusschwingung: die waagrechte Achse ist die Zeitachse, die senkrechte Achse misst den sich periodisch ändernden Luftdruck.

Wenn man eine Stimmgabel, oder mit modernen Mitteln noch besser: einen elektronischen Sinusgenerator tönen lässt, registriert unser Ohr die dabei erzeugte elementare *Sinusschwingung*: In der Einheit Hertz misst man ihre *Frequenz*, wie oft sich das Druckmaximum und Druckminimum in der Luft innerhalb einer Sekunde wiederholt. Der Oboist eines Orchesters teilt seinen Kollegen vor Eintritt des Dirigenten zum Beispiel die Frequenz 440 Hertz, also die Zahl von 440 Schwingungen in der Sekunde, als „Kammerton a" mit, indem er genau diesen Ton bläst, und die übrigen Musiker stimmen danach ihre Instrumente. Allerdings klingt selbst die näselnde Oboe angenehmer als der seltsam leere, „nackte" Ton einer Stimmgabel oder eines Sinusgenerators — dies liegt daran, dass im Klang eines Instruments, auch wenn sein Musiker nur einen einzigen Ton spielt, dieser eine Ton nicht als elementare Sinusschwingung mitgeteilt wird, sondern zusammen mit den Sinusschwingungen seiner *Obertöne*, das heißt mit den Tönen der doppelten, dreifachen, vierfachen, … Frequenz verwoben ist. Bemerkenswerterweise waren die Obertöne der Antike noch unbekannt, sie wurden erst 1636 von Marin Mersenne entdeckt und 1702 von Joseph Sauveur genau erforscht; die physikalischen Zusammenhänge wurden schließlich 1878 in einer Schrift über „Die Theorie des Schalls" von Lord Rayleigh untersucht.



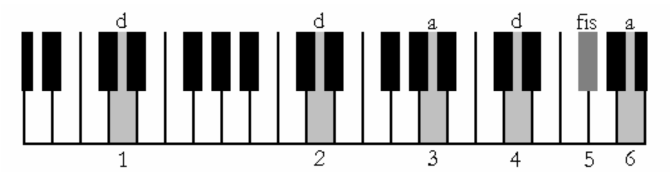
Die Summe von Grundschwingung und Oberschwingungen erzeugt einen Klang.

Die Intensitäten, mit denen die Obertöne den Grundton bereichern, sind für die eigentümliche Klangfarbe jedes Instruments verantwortlich. Es war eine der bemerkenswertesten Entdeckungen der Mathematik des 19. Jahrhunderts, als Joseph Fourier feststellte, dass sich praktisch *jede* Schwingung durch eine Überlagerung ihres Grundtons mit seinen Obertönen realisieren lässt, die sich aus den ganzzahligen Frequenzen des Grundtons ergeben — die elektronischen Synthesizer nützen diese Einsicht Fouriers offensichtlich sehr erfolgreich aus.

Joseph Fourier

Es ist diese Einsicht, die den Zusammenhang von *Zahl* und *Klang* herstellt:

Spielt ein Pianist ein d mit 147 Hertz, hört das Ohr nicht nur den Grundton mit $1 \cdot 147 = 147$ Hertz, sondern auch das d in der Oktav mit $2 \cdot 147 = 294$ Hertz, das darauffolgende a mit $3 \cdot 147 = 441$ Hertz, das darauffolgende d mit $4 \cdot 147 = 588$ Hertz, das darauffolgende fis mit $5 \cdot 147 = 735$ Hertz, das darauffolgende a mit $6 \cdot 147 = 882$ Hertz, das darauffolgende c mit $7 \cdot 147 = 1029$ Hertz, das darauffolgende d mit $8 \cdot 147 = 1176$ Hertz, und so weiter. Nicht die Frequenzen der 147, 294, 441, 588, … Hertz sind das für uns Maßgebliche — diese sind ja bloß




Die Obertöne von d auf der Tastatur des Klaviers

durch die Übereinkunft des Kammertons festgelegt — sondern die dabei aufscheinenden Faktoren: die *Zahlen* 1, 2, 3, 4, …: sie teilen uns die *Verhältnisse* der Frequenzen aller jener Sinusschwingungen mit, welche beim Spielen eines beliebigen Tons — in unserem Beispiel, an dem wir im folgenden festhalten wollen, des Tons d am Klavier — zusammen mit diesem Ton erklingen können.

Es sei gleich jetzt bemerkt, dass fast alles, was im vorigen Absatz geschrieben wurde, zwar vage, aber keineswegs völlig exakt stimmt. Im folgenden werden wir bald auf die Unkorrektheiten zu sprechen kommen, bis wir am Ende wieder zum Fugenthema vom „Wohltemperierten Klavier“ zurückkehren. Halten wir zunächst fest:

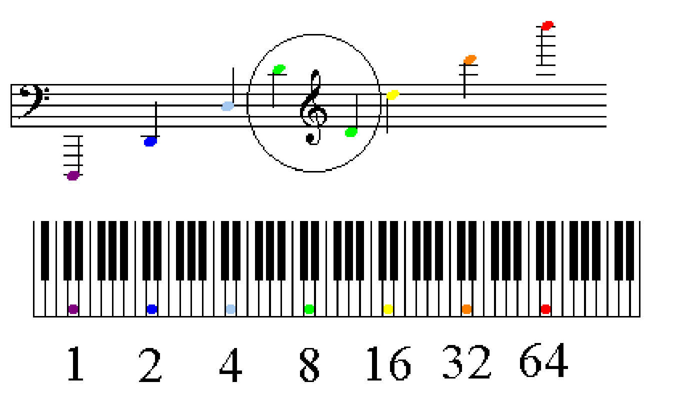
Das Verhältnis der Frequenzen zweier Töne, eines *ersten Tons* oder *Grundtons* und eines *zweiten Tons* oder *Zieltons*, der zusammen mit oder unmittelbar nach dem Grundton gehört wird, nennen wir ein musikalisches *Intervall*. Ein Frequenzenverhältnis ist zugleich ein Zahlenverhältnis. Das elementarste der Intervalle ist die *Prim*, in der der Grundton mit sich selbst verglichen wird; ihr entspricht das Zahlenverhältnis 1:1 = 1. Das nächstelementare Intervall ist die *Oktav*, in der der Ton mit der doppelten Frequenz, der erste Oberton, mit dem Grundton verglichen wird; ihr entspricht das Zahlenverhältnis 2:1 = 2.

Was wir oben über die Oktav schrieben, stimmt uneingeschränkt. Es gilt sogar noch mehr: Würde man den höheren Ton der Oktav selbst wieder als Grundton spielen, kämen in seiner Obertonreihe — abgesehen vom ursprünglichen Grundton — *alle* Obertöne des ursprünglichen Grundtons wieder vor. Darum ist die Oktav, abgesehen von der Prim, das *konsonanteste* aller Intervalle, denn das Ohr hört die von diesen Tönen erzeugten Klänge als vollkommen zusammengehörig.

Die Zusammengehörigkeit der beiden Töne einer Oktav ist derart eng, dass unser Gehör um Oktaven verschobene Töne sogar als *gleich* empfindet. Anders ausgedrückt: Zwei Töne gelten als gleich, wenn die Frequenz des höheren durch fortgesetztes Verdoppeln aus der Frequenz des niedrigeren Tons gewonnen wird. Die Gleichwertigkeit sich bloß um Oktaven unterscheidender Töne spiegelt sich mathematisch in der folgenden *Übereinkunft* wieder:

*Ein musikalisches Intervall ändert sich nicht, wenn man es mit* 2 *multipliziert (d.h. den zweiten Ton um eine Oktav höher spielt bzw. den ersten Ton um eine Oktav tiefer spielt); ein musikalisches Intervall ändert sich ebenfalls nicht, wenn man es durch* 2 *dividiert (d.h. den zweiten Ton um eine Oktav tiefer spielt bzw. den ersten Ton um eine Oktav höher spielt).*

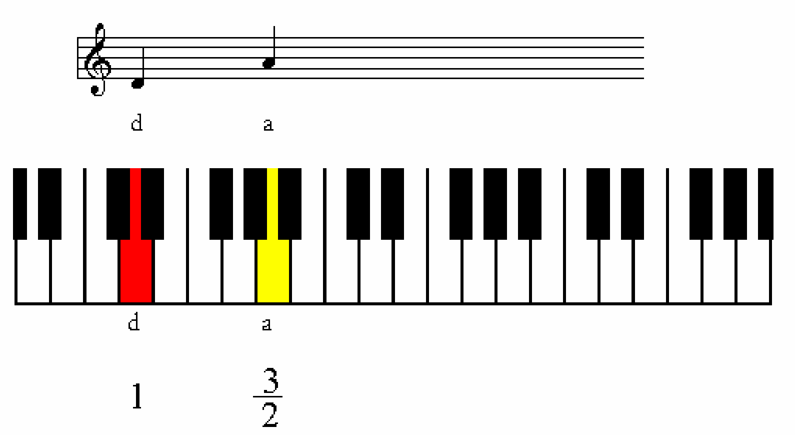
Diese Übereinkunft erlaubt, die Zahlenverhältnisse aller musikalischen Intervalle so zu beschränken, dass sie mindestens so groß wie 1 aber kleiner als 2 sind — musikalisch gesprochen: der



Die Oktaven erklingen in der doppelten, vierfachen, achtfachen, … Frequenz des Grundtons.

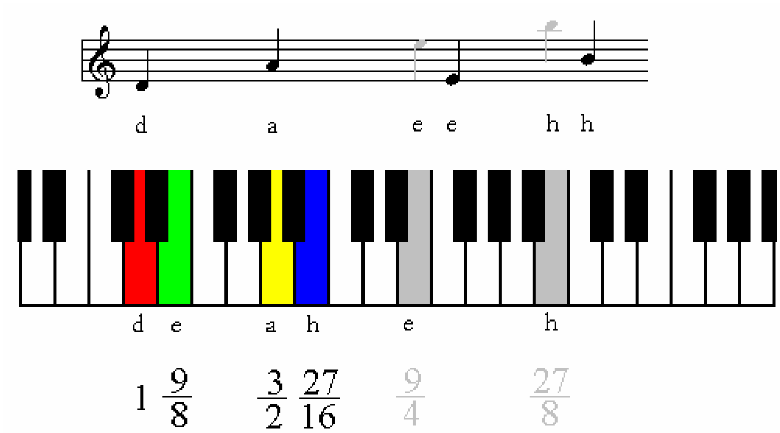
zweite Ton eines Intervalls erklingt (nach geeignetem Oktavieren) stets mindestens so hoch wie der erste Ton aber niedriger als dessen Oktav.

Betrachten wir als Beispiel die Obertonreihe des Grundtons d: Nach der Oktav folgt als nächstes der Oberton a mit der dreifachen Frequenz. Spielt man dieses a um eine Oktav tiefer, erhält man das Intervall d-a, dem das Zahlenverhältnis 3:2 entspricht. Dies ist die *Quint*, ein ebenfalls konsonantes Intervall, weil jeder zweite Oberton von a mit jedem dritten Oberton von d übereinstimmt.




Es war die Idee des Pythagoras und seiner Schule, mit Hilfe der Quint zu weiteren Tönen zu gelangen: Nicht nur das Intervall d-a, auch das auf den Grundton a bezogene Intervall a-e ist Quint. Dies bedeutet, dass die Frequenz von e um den Faktor 3:2 größer als jene von a ist, welche ihrerseits um den Faktor 3:2 größer als jene des ursprünglichen Tons d war. Darum errechnet sich das Frequenzenverhältnis von e zu d als (3:2)·(3:2) = 9:4. Spielt man dieses e eine Oktave tiefer, erhält man so mit d als Grundton die *Sekund* d-e, der das Zahlenverhältnis 9:8 entspricht. Schließlich betrachten wir die auf den Grundton e bezogene Quint e-h: die Frequenz des Tones h ist um den Faktor 3:2 größer als jene von e, folglich errechnet sich das Frequenzenverhältnis von h zu d als (3:2)·(9:8) = 27:16, welches die *Sext* kennzeichnet.

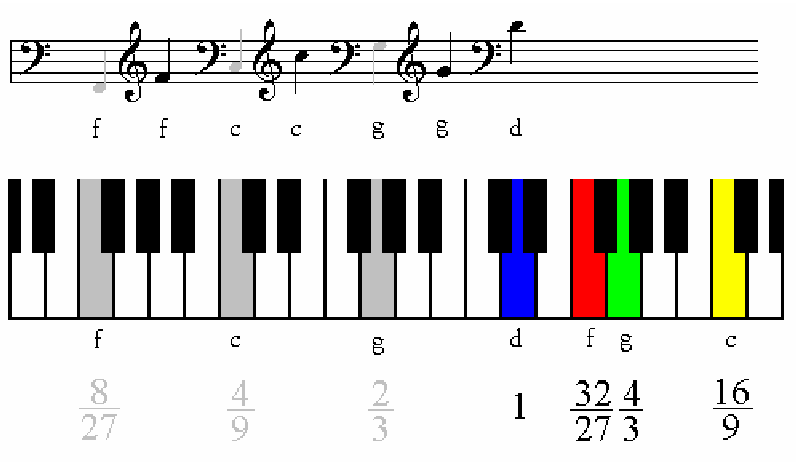
So kommen wir zu der folgenden Liste von Intervallen bzw. von Zahlenverhältnissen:



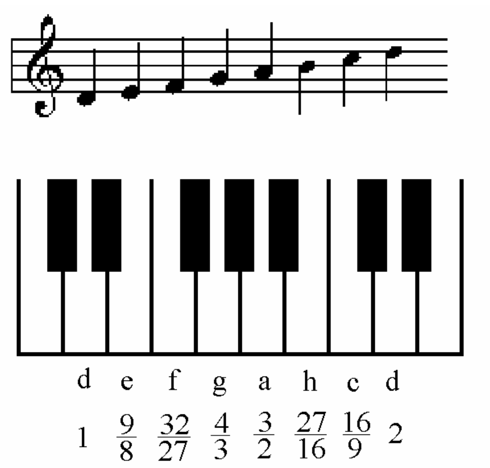

Ferner fragt Pythagoras nach jenem Grundton g, mit dem verglichen d eine Quint bildet: Weil das Frequenzenverhältnis g-d die Quint 3:2 ist, muss das reziproke Frequenzenverhältnis d-g durch den Kehrwert 2:3 gekennzeichnet sein; spielt man nun dieses g eine Oktav höher, bildet es zu d eine *Quart* d-g, der das Zahlenverhältnis 4:3 entspricht. Wie schon zuvor kann man nun nach dem Grundton c fragen, welcher mit g verglichen eine Quint bildet: Die Frequenz von c ist um den Faktor 2:3 kleiner als jene von g, welche ihrerseits (nach der Oktavierung) um den Faktor 4:3 größer als jene des ursprünglichen Tones d war. Das Verhältnis der Frequenz von c zu d beträgt folglich (2:3)·(4:3) = 8:9; spielt man dieses c um eine Oktave höher, erhält man so mit d als Grundton die *Septim* d-c, der das Zahlenverhältnis 16:9 entspricht. Schließlich betrachten wir den Grundton f, auf den sich die Quint f-c bezieht: die Frequenz des Tons f ist um den Faktor

2:3 kleiner als jene von c, folglich errechnet sich das Frequenzenverhältnis von f zu d als (2:3)·(16:9) = 32:27, welches die *Terz* kennzeichnet.

So kommen wir zu der folgenden Liste von Intervallen bzw. von Zahlenverhältnissen:




Auf diese Weise erhielten die Pythagoräer in der Skala einer Oktav die sieben Töne d, e, f, g, a, h, c, welche den weißen Tasten unseres Klaviers entsprechen[i].



Am nächsten kommen einander in dieser Skala die Töne e und f sowie die Töne h und c. Das Intervall e-f errechnet sich folgendermaßen: Wenn man die Frequenz von e mit 8:9 multipliziert, gelangt man zur Frequenz des Tons d, diese mit 32:27 multipliziert, ergibt die Frequenz des Tons f. Folglich lautet das Intervall e-f:

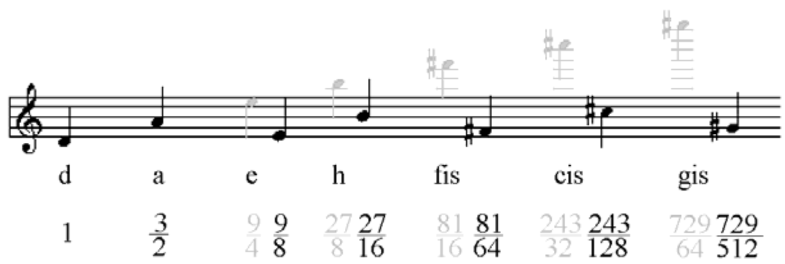
$$(8:9)\cdot(32:27) = 256:243.$$

Analog errechnet sich das Intervall h-c als

$$(16:27)\cdot(16:9) = 256:243.$$

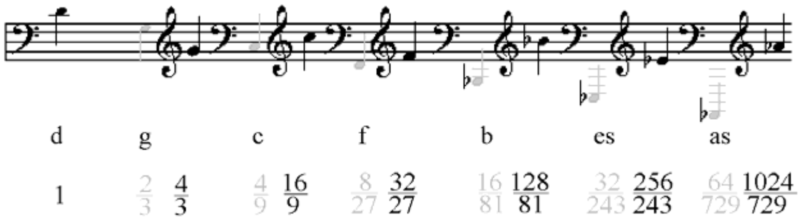
Beide Male ergibt sich 256:243; es ist der sogenannte *Halbtonschritt*, ein außerordentlich dissonantes Intervall, denn erst jeder 256. Oberton von e bzw. von h stimmt mit jedem 243. Oberton von f bzw. von c überein.

Der Halbtonschritt erfordert, zu den bisher erhaltenen *Ganztönen* weitere *Halbtöne* hinzuzufügen — die *diatonische Tonleiter* wird zur *chromatischen Tonleiter* oder, einfacher ausgedrückt: die weißen Tasten des Klaviers werden um die schwarzen Tasten ergänzt. Zu diesem Zweck türmen wir wie vorher weitere Quinten auf- bzw. untereinander und versetzen die erhaltenen Töne so lange, bis sie in die Skala einer Oktav fallen: aufsteigend und absteigend.

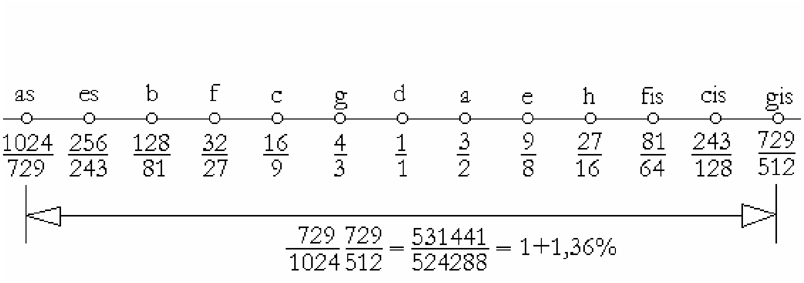



Der aufsteigende Quintenturm von d bis gis

Bricht man (willkürlich) bei gis bzw. bei as ab und ordnet die Töne ihrer Höhe entsprechend an, bekommt man auf diese Weise die Intervalle der pythagoräischen Stimmung.




Der absteigende Quartenturm von d bis as




Zwölf aufeinandergetürmte Quinten (von as bis gis) ergeben fast genau sieben Oktaven.

In dieser Skala liegen die Töne as und gis außerordentlich nahe benachbart: das Intervall as-gis errechnet sich als jenes Zahlenverhältnis, das man als Produkt des Intervalls as-d, also des Kehrwertes vom Intervall d-as, mit dem Intervall d-g erhält:

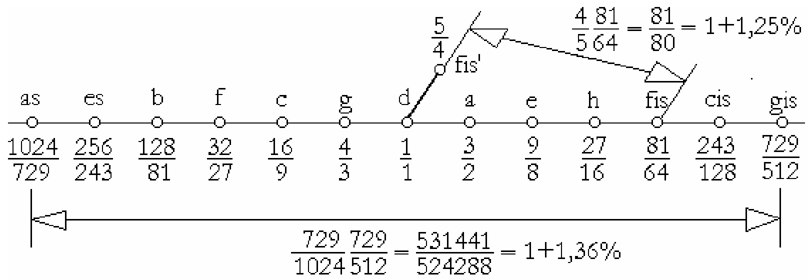
$$(729:1024)\cdot(729:512) = 531441:524288 = 1{,}0136\ldots.$$

Es unterscheidet sich also nur um 0,0136… ≈ 1,4% von der Prim — ein für den ungeübten Musiker nicht erkennbarer Unterschied. Der Halbtonschritt 256:243 = 1,053497… unterscheidet sich im Vergleich dazu um mehr als 5,3% von der Prim. Der Unterschied zwischen gis und as von knapp 1,4% ist das berühmte *pythagoräische Komma*. Er ist so gering, dass die Erfinder von Tasteninstrumenten darauf verzichteten, die Tonskala durch das Auftürmen weiterer Quinten zu bereichern — bildhaft gesprochen: auf dem Klavier kommen keine weiteren Tasten hinzu. Damit haben wir bereits eine der angekündigten Unkorrektheiten angesprochen: Der Pianist begeht sorgenlos die Sünde der *enharmonischen Verwechslung* und setzt gis mit as, in der Folge dis mit es, ais mit b und so weiter gleich, obwohl dies genau genommen verboten ist[ii] (und ein Geiger, der auf seiner Violine die Töne intoniert, dieses Verbot auch beachtet).

Viel einschneidender als das pythagoräische Komma empfindet der Musiker der Neuzeit die Tatsache, dass im pythagoräischen System die große Terz d-fis als *dissonantes* Intervall 81:64 gespielt wird: nur jeder 81. Oberton von d stimmt mit jedem 64. Oberton von fis überein. In Wahrheit ertönt das fis als vierter Oberton in der Obertonreihe von d, besitzt folglich die *fünffache* Frequenz des Grundtons. Versetzt man diesen Oberton zwei Oktaven tiefer, erhält man so die *konsonante* große Terz d-fis als Zahlenverhältnis 5:4: jeder vierte Oberton von fis stimmt mit jedem fünften Oberton von d überein. Den Unterschied zwischen der konsonanten großen Terz und der (etwas höher liegenden) dissonanten pythagoräischen großen Terz errechnet man genauso wie oben das Intervall as-gis ermittelt wurde: der Kehrwert von 5:4 wird mit 81:64 multipliziert:

$$(4:5)\cdot(81:64) = 81:80 = 1{,}0125.$$

Dieser Unterschied von 1,25% zur Prim heißt das *syntonische Komma*. Es wird vermieden, wenn man sich von der Methode der Pythagoräer, allein mit Hilfe von Quinten zu Tönen zu gelangen, löst:

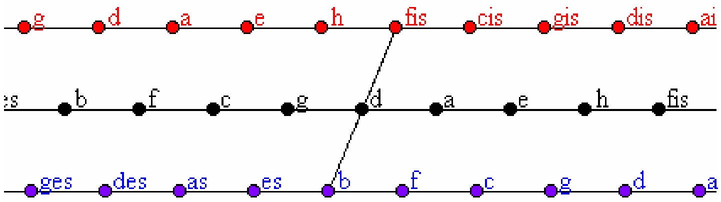



Die pythagoräische Terz unterscheidet sich um 80:81 von der reinen Terz.

Die Quintenstimmung der Pythagoräer ist in gewisser Hinsicht *eindimensional*: alle Töne entstehen bloß aus Quinten (welche durch die *Primzahl* 3 gekennzeichnet ist) — sieht man von den Versetzungen um Oktaven (gekennzeichnet durch die *Primzahl* 2) ab. Darum sind bei den Intervallen der Quintenstimmung die Zähler und Nenner nur durch 2 und durch 3 teilbar. Die neuzeitliche europäische Musik definiert statt 81:64 das Zahlenverhältnis 5:4 als große Terz und erhält auf diese Weise die Töne in der *harmonischen* oder *reinen*

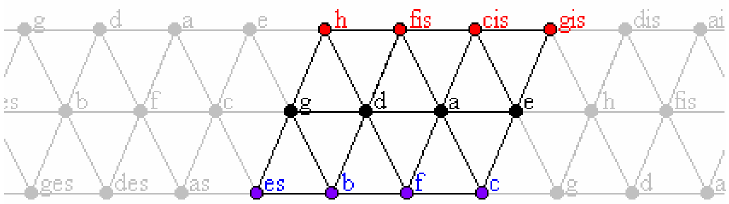
*Stimmung*, welche *zweidimensional* ist: alle Töne entstehen entweder aus Quinten (welche durch die *Primzahl* 3 gekennzeichnet ist) oder aus großen Terzen (welche durch die *Primzahl* 5 gekennzeichnet ist):

Die beiden Töne h und fis zeichnen wir eine Stufe *über* die sich entlang einer eindimensionalen Geraden erstreckenden Quinten …-as-es-b-f-c-g-d-a-e-h-fis-cis-gis-… ein: auch sie sind Stützpunkte einer dazu parallel liegenden Geraden, entlang der sich die Quinten …-f-c-g-d-a-e-h-fis-cis-gis-dis-ais-eis-… erstrecken. Ebenso zeichnen wir

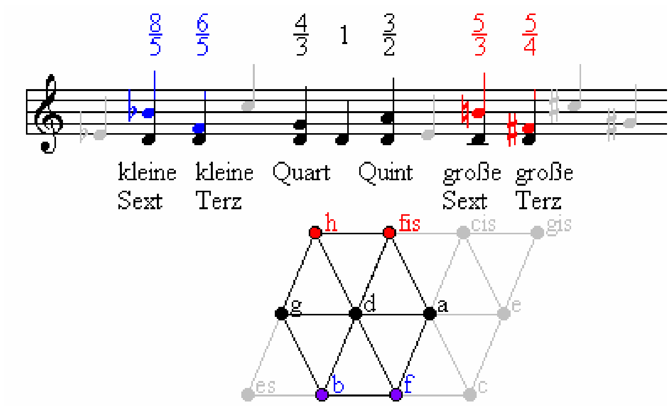



die beiden Töne b und f eine Stufe *unter* die sich entlang einer eindimensionalen Geraden erstreckenden Quinten …-as-es-b-f-c-g-d-a-e-h-fis-cis-gis-… ein: auch sie sind Stützpunkte einer dazu parallel liegenden Geraden, entlang der sich die Quinten …-ces-ges-des-as-es-b-f-c-g-d-a-e-h-… erstrecken.

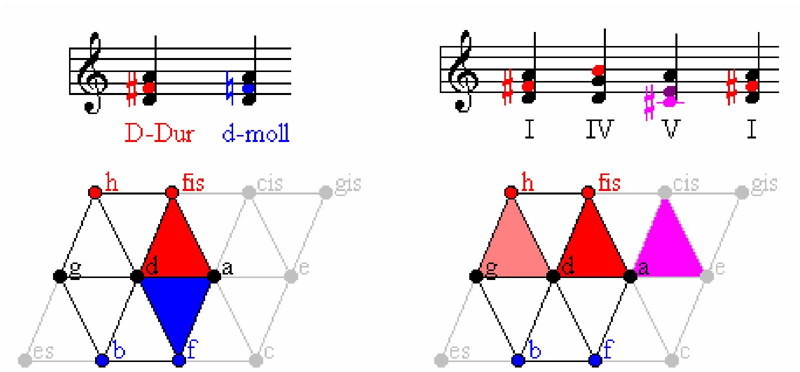
Geometrisch bilden die zwölf Töne der chromatischen Skala ein *Parallelogramm*, wobei die Parallelseiten, welche die Richtung der Quint einschlagen, jeweils vier und die Parallelseiten, welche die Richtung der *großen* Terz einschlagen, jeweils drei Töne tragen.




Die Zahlenverhältnisse für die konsonanten Intervalle, welche in der zweidimensionalen Ebene ein *Sechseck* aufspannen, lauten folgendermaßen: Die nach der *Prim* bzw. der *Oktav* d-d konsonantesten Intervalle bleiben die *Quint* d-a und die *Quart* d-g. Als konsonante Intervalle gelten die *große Terz* d-fis und die *kleine Sext* d-b, welche aus der Umkehrung der großen Terz (mit nachfolgender Oktavierung) entsteht. Schließlich gelten als konsonante Intervalle noch die *kleine Terz* d-f und die *große Sext* d-h: die Töne f bzw. h sind in ihnen so festgelegt, dass f-a bzw. g-h eine große Terz bilden.




Mit der Einführung der reinen Stimmung erhalten der *Durdreiklang* d-fis-a und der *Molldreiklang* d-f-a — geometrisch als Dreiecke realisiert, die zur Achse in Quintenrichtung spiegelsymmetrisch liegen — ihren harmonischen Charakter, und man kann die einfache *Kadenz* von Tonika d zu Subdominante g, Dominante a und Tonika d sehr schön als Verschiebung des „Dur-Dreiecks“ innerhalb des Parallelogramms nachvollziehen.




Den Gedanken, dass die Quint und die große Terz die Richtungen einer zweidimensionalen Musik aufspannen, kann man theoretisch noch weiterspinnen: Der sechste Oberton von d ist nicht exakt, wie zu Beginn behauptet, der Ton c der kleinen Septim (versetzt um zwei Oktaven), sondern etwas tiefer angesiedelt: als Ton mit der *siebenfachen* Frequenz des Grundtons entspricht, um die beiden Oktaven zurückversetzt, das erhaltene Intervall der *Naturseptim*[iii] mit dem Frequenzenverhältnis 7:4. Wenn man auf die zwölf Töne des zweidimensionalen Parallelogramms der reinen Stimmung die Naturseptimen in einer dritten Richtung aufschichtet, erhält man ein *dreidimensionales* Gebilde von Tönen, für welches die *Primzahlen* 3 für die Quint, 5 für die große Terz und 7 für die Naturseptim die „Bauelemente" darstellen. Tatsächlich findet in manchen Varianten der modernen Musik, etwa des Jazz, die Naturseptim Verwendung; in der klassischen europäischen Musik gilt sie hingegen als *ekmelisches* Intervall; es liegt — wie das Wort sagt — außerhalb der in unserem Kulturkreis gängigen Melodien. Dies ist, wenn man so will, eine willkürlich getroffene Entscheidung für das *zweidimensionale* Hören von Musik.

Bezöge man die Naturseptim und die aus ihr gewonnenen ekmelischen Töne in die Musik ein — das „vollkommene" Hören wäre damit noch lange nicht erreicht: denn der Oberton mit der *elffachen* Frequenz des Grundtons lauert als nächstes ekmelisches Intervall, das in die vierte Dimension der Musik stößt, und der Oberton mit der *dreizehnfachen* Frequenz des Grundtons benötigt eine fünfte Dimension der Musik. Es ist klar, dass jeder Oberton mit einer ungeraden *Primzahl* als Vielfachheit der Grundtonfrequenz zu einer weiteren Dimension der Musik führt — und da es unendlich viele Primzahlen gibt, ist, genau genommen, die Musik *unendlichdimensional*.

Die Einschränkung auf ein zweidimensionales Hören von Musik wiegt nicht allzu schwer, denn in Wahrheit ist — metaphorisch gesprochen — Musik nur „in den Ohren Gottes" unendlichdimensional. Das menschliche Ohr hingegen besitzt bloß die Erfahrung des Endlichen. Wir *müssen* uns auf eine endlichdimensionale Musik beschränken[iv], und dies gelingt — bereits bei der Dimension zwei — mit einer sehr sinnreichen Erfindung der Natur: sie lehrt das Ohr, Intervalle *zurecht* zu hören. Was ist damit gemeint?

Hört das Ohr ein Intervall, versucht es, dieses in die Skala der ihm bereits geläufigen Intervalle zu orten — dies sind im Bereich der klassischen europäischen Musik die oben genannten Intervalle der reinen Stimmung. Je konsonanter das Intervall ist, umso feinfühliger ist das Gehör bei der Feststellung leiser Differenzen, je dissonanter das Intervall ist, umso mehr toleriert das Gehör Abweichungen von der reinen Stimmung[v].

Doch selbst wenn wir uns auf das zweidimensionale Hören von Musik beschränken — hörten wir die Intervalle der reinen Stimmung „mit den Ohren Gottes“, würden wir immer noch *unendlich* viele Töne zur Erfassung der zweidimensionalen Musik benötigen. Denn wir dürfen, wenn wir mit „unendlich präziser“ Genauigkeit hörten, das pythagoräische Komma nicht außer acht lassen. Das syntonische Komma wurde durch die Erschließung der zweiten Dimension zwar überwunden (obwohl es weiter vorhanden ist, weil neben dem fis, das mit d die reine große Terz 5:4 bildet, das bloß aus Quinten gewonnene fis, das mit d die pythagoräische große Terz 81:64 bildet, nicht eliminiert wurde). Aber es kommen mit Erschließung der zweiten Dimension sogar weitere „Kommata“ hinzu: Drei aufeinandergetürmte große Terzen ergeben wegen

$$(5:4)\cdot(5:4)\cdot(5:4) = 125:64$$

fast aber nicht ganz eine Oktave: der Unterschied errechnet sich aus

$$2\cdot(64:125) = 128:125 = 1{,}024$$

als ein Fehler von 2,4%, der als *kleine Diesis* bezeichnet wird. Und vier aufeinandergetürmte kleine Terzen ergeben wegen

$$(6:5)\cdot(6:5)\cdot(6:5)\cdot(6:5) = 1296:625$$

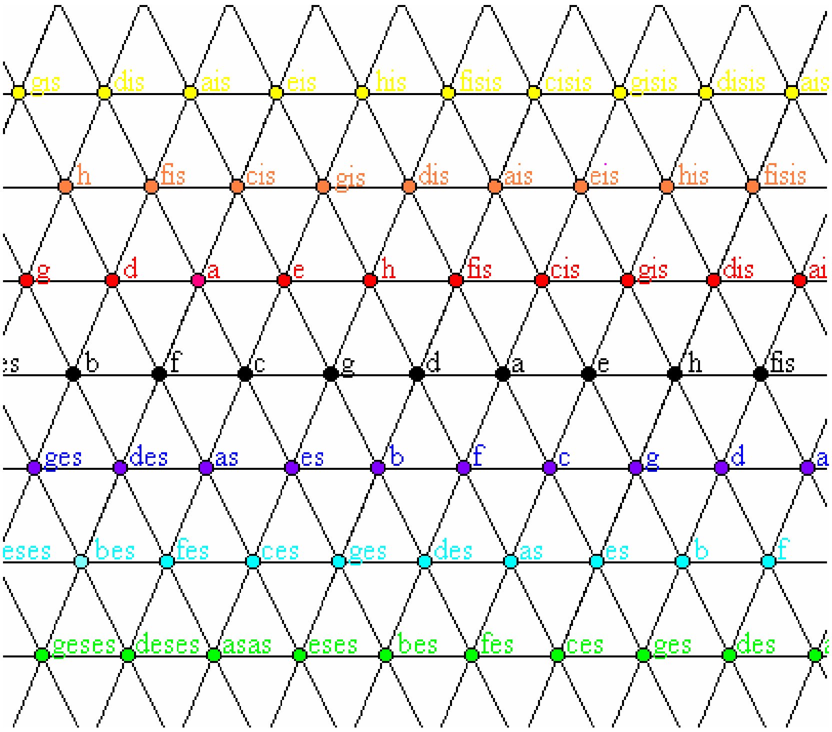
ein wenig mehr als ganz eine Oktave: der Unterschied errechnet sich aus

$$(1296:625)\cdot(1:2) = 1296:1250 = 1{,}0368$$

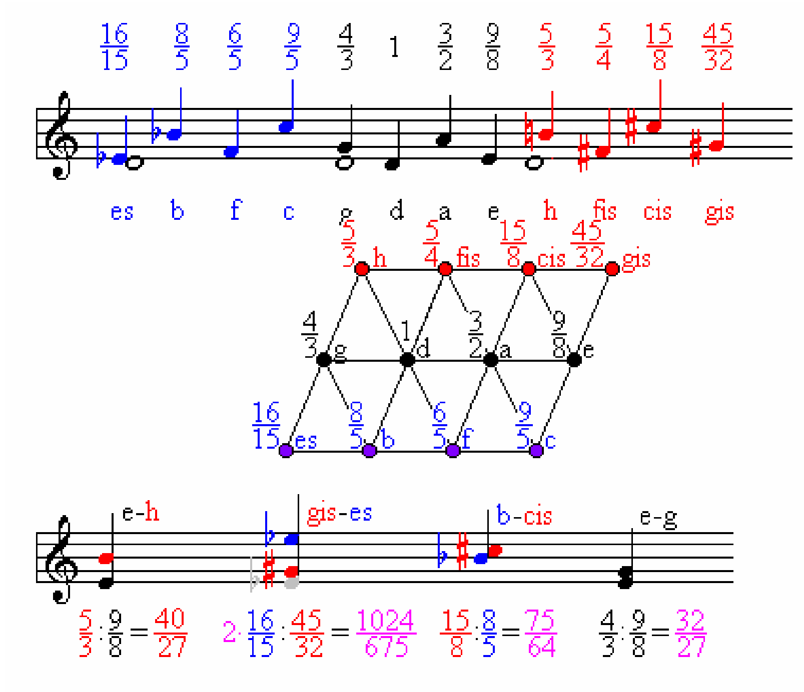
als ein Fehler von fast 3,7%, der als *große Diesis* bezeichnet wird. Wie das pythagoräische Komma die enharmonische Verwechslung verbietet, untersagen auch die kleine bzw. die große Diesis, den aus d mit Hilfe dreier übereinandergetürmter großer bzw. mit Hilfe von vier übereinandergetürmten kleinen Terzen erzeugten Ton wieder d zu nennen. Eine reine Stimmung bezogen auf den Grundton d erzeugt somit ein sich in die *unbegrenzte Ebene* erstreckendes *Gitter* von *unendlich* vielen Tönen (innerhalb einer einzigen Oktav!) — eine Erkenntnis, auf die von seiten der Mathematik zum ersten Mal der bedeutende Schweizer Gelehrte Leonhard Euler hinwies[vi].

Die Auswirkungen von pythagoräischem Komma, kleiner und großer Diesis für das Klavier sind fatal: Dass statt der unendlich vielen Töne des eulerschen Tongitters nur die zwölf Tasten innerhalb einer Oktav zur Verfügung stehen, ist noch verschmerzbar: statt der gesamten unbegrenzten Ebene betrachtet man eben bloß das beschränkte Parallelogramm von zwölf Tönen. Hingegen ist der folgende Mangel nicht mehr tolerierbar: Wenn man das Instrument rein auf den Grundton d stimmt, klingen die nicht auf diesen Grundton d bezogenen Intervalle im allgemeinen *nicht* mehr rein. Zum Beispiel errechnet sich die Quint e-

Leonhard Euler




Das eulersche Tonnetz: waagrecht erstrecken sich nach rechts Quinten, nach links Quarten, schräg rechts nach oben erstrecken sich große Terzen, schräg links nach unten kleine Sexten, schräg links nach oben erstrecken sich große Sexten, schräg rechts nach unten kleine Terzen.




Die Quint e-h, die (als verminderte Sext notierte) Quint gis-es, die (als übermäßige Sekund notierte) kleine Terz b-cis und die kleine Terz e-g klingen verstimmt, wenn man die reine Stimmung auf den Grundton d bezieht.

h als (8:9)·(5:3) = 40:27. Wegen (3:2)·(27:40) = 81:80 ist diese „Wolfsquint“ das syntonische Komma 1,25% von der reinen Quint e-h entfernt. Und es errechnet sich die große Terz gis-c als (32:45)·(9:5) = 32:25. Dieser Wert unterscheidet sich um (32:25)·(4:5) = 128:125, also um die 2,4% der kleinen Diesis bereits unangenehmer von der reinen großen Terz gis-his als die dissonante pythagoräische große Terz, die bloß knapp mehr als die Hälfte, nämlich das syntonische Komma von 1,25% von der reinen großen Terz trennt.

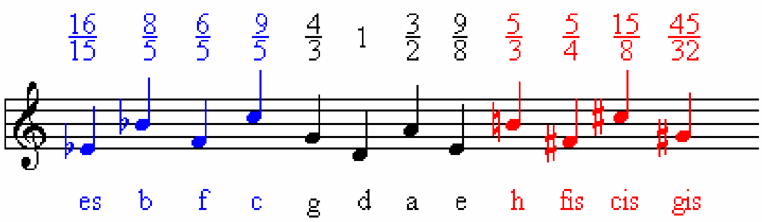
Das Klavier besteht nur deshalb als Musikinstrument, weil wir eben nicht „mit Gottes Ohren“ hören: Bereits 1585 erfand der Kaufmann, Zivil- und Militäringenieur Simon Stevin eine geniale Methode, aufgrund der Fähigkeit des menschlichen Ohres, Intervalle zurecht zu hören, Tasteninstrumente zu stimmen: Er definiert das Frequenzenverhältnis der kleinen Sekund als die $\sqrt[12]{2}$ genannte Größe:

eine sogenannte „unendliche Dezimalzahl“, deren ersten neun Stellen nach dem Dezimalpunkt

$$\sqrt[12]{2} = 1{,}059463094\ldots$$

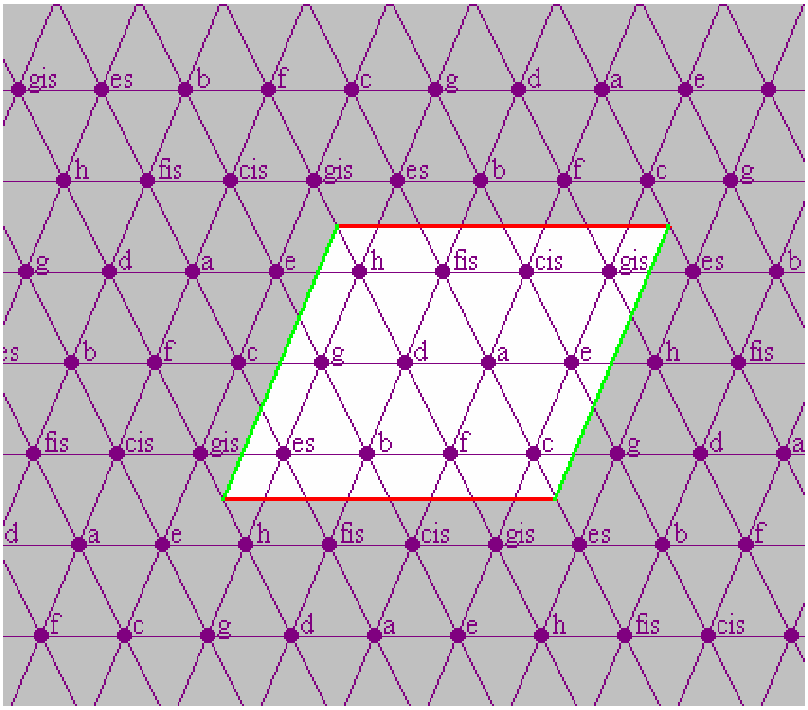
lauten. Diese Größe besitzt nämlich die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie, zwölf mal mit sich multipliziert, genau 2 als Ergebnis liefert[vii]. Diese Größe — genau genommen: eine endliche Dezimalzahl, welcher ihr genügend nahe kommt — definiert Stevin als Frequenzenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Töne der zwölftönigen Skala des Klaviers — egal um welche zwei Töne es sich handelt. Zwölf aufeinandergetürmte kleine Sekunden ergeben somit *genau* die Oktav. Wir vergleichen in der folgenden Tabelle diese von Stevin erfundene *temperierte* Stimmung mit der reinen Stimmung:

Simon Stevin



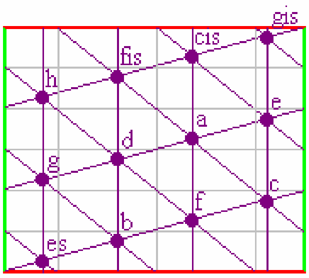

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1:1 | = 1,000 | $\sqrt[12]{2^0}$ | = 1,000 | 45:32 | = 1,406 | $\sqrt[12]{2^6}$ | = 1,414 |
| 16:15 | = 1,067 | $\sqrt[12]{2^1}$ | = 1,059 | 3:2 | = 1,500 | $\sqrt[12]{2^7}$ | = 1,498 |
| 9:8 | = 1,125 | $\sqrt[12]{2^2}$ | = 1,122 | 8:5 | = 1,600 | $\sqrt[12]{2^8}$ | = 1,587 |
| 6:5 | = 1,200 | $\sqrt[12]{2^3}$ | = 1,189 | 5:3 | = 1,667 | $\sqrt[12]{2^9}$ | = 1,682 |
| 5:4 | = 1,250 | $\sqrt[12]{2^4}$ | = 1,260 | 9:5 | = 1,800 | $\sqrt[12]{2^{10}}$ | = 1,782 |
| 4:3 | = 1,333 | $\sqrt[12]{2^5}$ | = 1,335 | 15:8 | = 1,875 | $\sqrt[12]{2^{11}}$ | = 1,888 |

Aus dieser Tabelle ersieht man: die temperierte Stimmung gibt die Intervalle so genau wieder, dass ein musikalisch geschultes Ohr sie sofort als rein gestimmte Intervalle zurecht hört — vor allem ist es ein glücklicher Zufall, dass die temperierte Stimmung die konsonanten Intervalle Quart und Quint, für die das Ohr besonders sensibel ist, besonders gut erfasst.



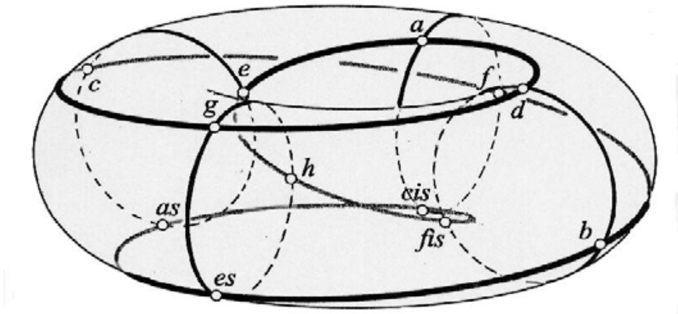

Bei der temperierten Stimmung reduzieren sich die unendlich vielen Töne des Eulernetzes auf die 12 Töne der chromatischen Skala.

Mit der temperierten Stimmung fallen sowohl das pythagoräische Komma als auch die kleine und die große Diesis weg: die unendlich vielen Töne, die Euler in das Gitter der unbeschränkten Ebene zeichnete, reduzieren sich auf die zwölf Töne in der Skala des Klaviers. Auch für diese Reduktion hat die Mathematik ein attraktives geometrisches Modell entworfen: die Ebene wird zu einer kompakten, geschlossenen, schlauchförmigen Fläche gekrümmt, die *Torus* heißt, und auf der die zwölf Töne des Klaviers gleichmäßig verteilt sind[viii]:




Das Parallelogramm der 12-Ton-Skala zu einem Rechteck verzerrt. Wenn man die beiden grünen und die beiden roten Kanten verheftet, erhält man einen Torus.

Man schneidet aus dem eulerschen Gitter ein Parallelogramm, in dem die 12 Töne der Skala des Klaviers verzeichnet sind. Dieses



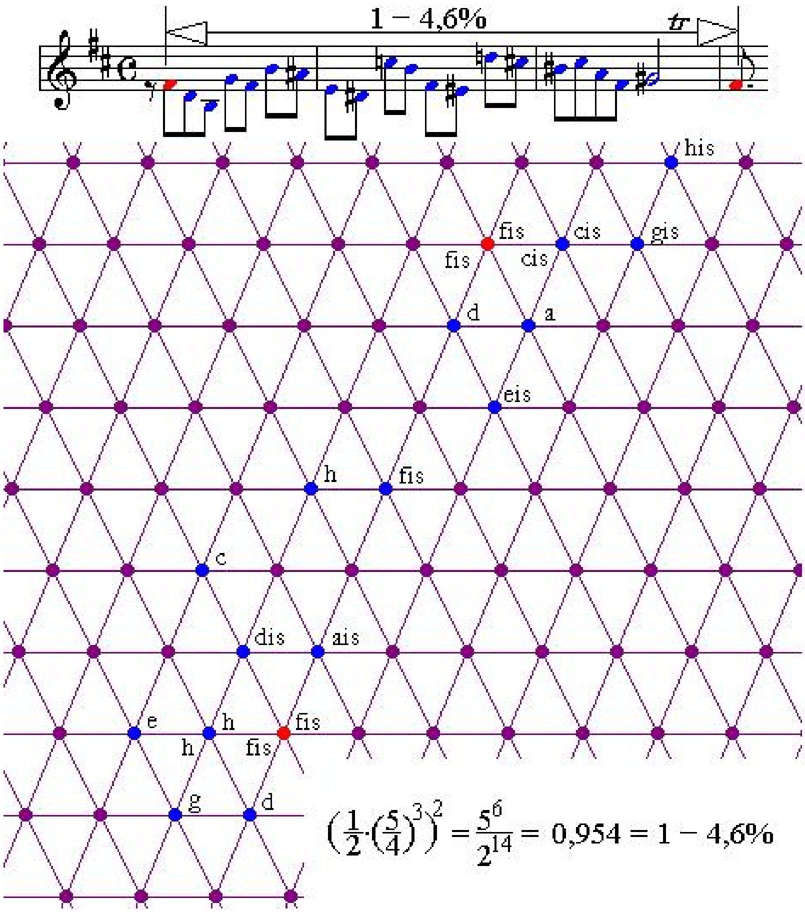

Die Rotoide verbindet die 12 Töne der chromatischen Skala entlang des „Quintenzirkels“ as-es-b-f-c-g-d-a-e-h-fis-cis und umwindet dabei dreimal den Torus. Die vier eingezeichneten Meridiankreise d-fis-b, a-cis-f, e-as-c, h-es-g des Torus verbinden je drei Töne entlang der „Großterzverwandtschaften“.

Parallelogramm denken wir uns als eine beliebig dehnbare und verformbare gummiartige Folie, die wir zuerst so zu einem *Zylinder* aufrollen und die beiden Gegenseiten verkleben, dass auf ihm die großen Terzen entlang von vier Kreisen verbunden sind. Danach werden die kreisförmigen Ränder des Zylinders ein wenig verdreht und so verklebt, dass in einer den Torus dreimal umrundenden Kurve, einer sogenannten *Rotoide*[ix], die zwölf Töne entlang des *Quintenzirkels* d-a-e-h-fis-cis-as-es-b-f-c-g-d durchlaufen werden. Mathematisch gesehen spielt der Pianist seine Töne auf einer zum Torus gekrümmten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit.

Johann Sebastian Bach empfand die Idee der temperierten Stimmung als genial — obwohl er noch nicht die oben beschriebene gleichschwebende Temperatur Simon Stevins benutzte. Selbst heute kann man mit den elektronischen Stimmgeräten nur eine *Näherung* der temperierten Stimmung erreichen, denn es liegt im Wesen der Größe $\sqrt[12]{2}$, dass sie nie mit endgültiger Exaktheit zur Verfügung steht. Das Stimmverfahren des Klaviers von Johann Philipp Kirnberger, auf das Bach zurückgriff, kommt dem Gedanken der temperierten Stimmung jedenfalls sehr nahe. Bach verfasste nicht zuletzt, um die Anpassungsfähigkeit praktisch temperiert gestimmter Tasteninstrumente beim Tonartenwechsel zu belegen, sein berühmtes „Wohltemperiertes Klavier“. Dies führt uns auf das bereits zu Beginn zitierte Thema der letzten Fuge des ersten Teils vom „Wohltemperierten Klavier“ zurück.

Mit der Fähigkeit unseres Gehörs, Intervalle auch dann rein zu hören, wenn sie um einen Hauch verstimmt sind, wie dies bei der temperierten Stimmung der Fall ist, gelingt es uns doch noch — trotz der im Endlichen verharrenden Unbeholfenheit des Tasteninstruments — wenigstens eine Ahnung dessen zu vernehmen, wie die Musik „in Gottes Ohren“ klingt. Wenn man im besonderen die rein gestimmt gedachten Intervalle des Fugenthemas von der letzten Fuge im ersten Teil des „Wohltemperierten Klaviers“ aneinanderfügt, erhält man keineswegs die von fis zu fis führende Prim im Verhältnis 1:1 = 1, vielmehr sind die beiden fis im eulerschen Gitter der Töne weit voneinander entfernt[x] (was auf dem Klavier einem mehrfachen Umrunden des Torus der zwölf Töne entspricht) und man kommt auf das Intervall

15625:16384 = 0,95367….



Das auf die reine Stimmung konditionierte Ohr hört den Endton fis des Themas um mehr als 4,6% *tiefer* als den Anfangston fis[xi]. Obwohl der Pianist notgedrungen die gleiche Taste spielt, erzwingt diese — wie uns die Zahlensymbolik lehrte — von unerfüllter Sehnsucht getragene Melodie beim Zuhörer das Empfinden einer *Verdüsterung* des Tons. Wurde dieser Effekt von Bach beabsichtigt oder entspringt er dem intuitiven Genie des Komponisten? Wir wissen es nicht. Was uns bleibt, ist bloß das Thema mit den unauslotbaren Geheimnissen, die es in sich birgt.

---

[i] Hätten wir jeweils einen Schritt vorher abgebrochen, wären wir statt zur *Heptatonik* bloß zur *Pentatonik* der fünf Töne d, e, g, a, c gelangt — ein Tonsystem, das in manchen außereuropäischen Kulturen vorherrscht. Ersetzt man den Grundton d durch das as, lieferten die Töne as, b, des, es, ges das entsprechende pentatonische System, das den *schwarzen* Tasten des Klaviers entspricht; Chopins Étude für die schwarzen Tasten ist von der Pentatonik inspiriert.

[ii] Eine „Erlösung" vom pythagoräischen Komma ist aussichtslos: jeder Versuch, mit aufsteigenden und absteigenden Quinten von einem Grundton ausgehend wieder zu diesem Ton zurück zu gelangen, ist zum Scheitern verurteilt: Denn die vom Grundton aus betrachteten Intervalle der *aufsteigenden* Quinten sind offensichtlich dadurch gekennzeichnet, dass im Zähler des entsprechenden Bruchs eine Potenz von 3, folglich eine *ungerade* Zahl und im Nenner dieses Bruchs eine Potenz von 2, folglich eine *gerade* Zahl stehen. Bei den vom Grundton aus betrachteten Intervallen der *absteigenden* Quinten ist dies genau umgekehrt. Weil jedoch nie eine gerade Zahl mit einer ungeraden Zahl übereinstimmen kann, bleibt ein „pythagoräisches Komma" — egal wie hoch und tief man die „Quintentürme" errichtet — unvermeidlich.

[iii] Der Unterschied zur oben berechneten kleinen Septim errechnet sich ähnlich wie der des pythagoräischen oder des syntonischen Kommas: er lautet $(9/5)\cdot(4/7) = 36/35 = 1{,}0286\ldots$, beträgt also knapp 2,9%.

[iv] Sich auf eine geringe Zahl von Dimensionen einzuschränken erinnert — obwohl es sich wohl nur um eine oberflächliche Analogie handelt — an die exotische „String"-Theorie der modernen theoretischen Physik, worin das Universum zehn oder gar noch mehr Dimensionen besitzt, die meisten dieser Dimensionen aber so sehr „in sich gekrümmt" sind, dass wir sie nicht wahrnehmen.

[v] Genau genommen ist zu unterscheiden, ob das Ohr ein Intervall noch überhaupt als solches erkennt, jedoch als „verstimmt" wahrnimmt — dieses Zurechthören meinen wir hier nicht — oder ob das Ohr das nur wenig verstimmte Intervall bereits als „rein" empfindet.

[vi] Bereits vor Euler hat der Musiktheoretiker Conrad Henfling dieses Tonnetz entworfen.

[vii] Eben aufgrund dieser Definition erhält man die Nachkommastellen von $\sqrt[12]{2}$: angenommen, wir wüssten bereits, dass das zwölffache Produkt von 1,059 mit sich kleiner als 2, hingegen das zwölffache Produkt von 1,060 mit sich größer als 2 ist:

dann stellt 1,059 die auf *drei* Nachkommastellen genau berechnete Näherung an $^{12}\sqrt{2}$ dar. Als nächstes berechnet man von allen Dezimalzahlen 1,0590, 1,0591, 1,0592, 1,0593, ..., 1,0599, 1,0600 das zwölffache Produkt mit sich selbst und erkennt, dass das zwölffache Produkt von 1,0594 mit sich kleiner als 2, hingegen das zwölffache Produkt von 1,0595 mit sich größer als 2 ist. Folglich stellt 1,0594 die auf *vier* Nachkommastellen genau berechnete Näherung an $^{12}\sqrt{2}$ dar. Dieses Verfahren kann man offenkundig beliebig weit vorantreiben, d.h. $^{12}\sqrt{2}$ auf *beliebig viele* Nachkommastellen genau ermitteln.

[viii] Wenn man auf diesem Torus das eulersche Netz der Töne einträgt, bewirken die Versetzungen des pythagoräischen Kommas und der Diesis, dass die Gitterpunkte, welche die Töne darstellen, sich sehr rasch dicht auf dem Torus verteilen. Nach einer von Hermann Weyl, dem bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, ins Leben gerufenen und vom österreichischen Mathematiker Edmund Hlawka weitgehend entwickelten „Theorie der Gleichverteilung“ sind die Töne des eulerschen Netzes auf dem Torus der temperierten Stimmung sogar *„modulo Oktaven gleichverteilt“*.

[ix] So werden diese Raumkurven jedenfalls in der von Walter Wunderlich geprägten Wiener Schule der Darstellenden Geometrie benannt. Hermann Weyl betrachtet in seiner Arbeit über Gleichverteilung statt ihrer eine *Loxodrome* des Torus, wörtlich: eine „Schiefläufige“, weil sie die Meridiankreise der Drehfläche, auf der sie sich befindet, unter einem konstanten Winkel schneidet. Die qualitative Eigenschaft des Dicht-Liegens ist jedoch bei Rotoiden genauso wie bei Loxodromen gegeben.

[x] Geht man vom fis aus, landet man genau genommen beim disisisis.

[xi] Diese nicht ganz zwingende Deutung stützt sich auf die Tatsache, dass der Pianist *nicht* in der Lage ist, die Töne zu intonieren und folglich auf eine den Noten zugrundeliegende Harmonie zu stützen, dass auch unser Ohr nicht diese Harmonien sucht, sondern das Fugenthema gleichsam wie eine Zwölftonreihe der Schönbergschule von Intervall zu Intervall vernimmt und dass die Tempobezeichnung „Largo“ — eine der seltenen Tempovorschriften, die Bach dem Interpreten vorgibt — im Sinn von Johann Mattheson dieses Hören von Intervall zu Intervall unterstützt. Spielt man das Fugenthema auf der Geige, ist man eher dazu geneigt, zum ursprünglichen fis zurückzukehren.